第29講　微分法・積分法(2)

【基礎確認事項】

［1］　関数の増減と極大・極小

□$1 \leqq x \leqq 2$，$3 < x$ などを満たす実数 x の集合を**区間**という．

□関数 $f(x)$ について，ある区間内の任意の x_1，x_2 に対して

$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で（単調に）**増加**するという．

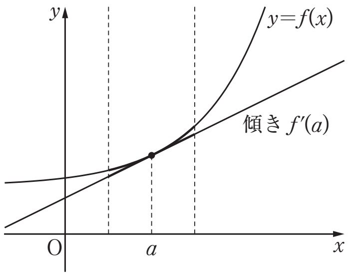
$$x_1 < x_2 \quad \text{ならば} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で（単調に）**減少**するという．

例　関数 $y=x^2$　は　$x \geqq 0$ の区間では単調に増加し，$x<0$ の区間では単調に減少する．

□関数 $y=f(x)$ のグラフ上の1点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ にごく近いところでは，関数のグラフは $x=a$ における接線のグラフとほとんど一致していると考えることができる．

$x=a$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり，$f'(a)$ の値が正のときは右上がり，負のときは右下がり，0のときは x 軸に平行である．したがって，以下のことがいえる．



> **関数の増減**
> $f'(x)>0$ が成り立つ区間では $f(x)$ は増加する
> $f'(x)<0$ が成り立つ区間では $f(x)$ は減少する
> $f'(x)=0$ が成り立つ区間では $f(x)$ は定数である

□$y=f(x)$ において x を増加させたとき，$x=a$ の前後で

$f'(x)$ の値が正から負に変わるとき

$f(x)$ は増加から減少に転じる．このとき

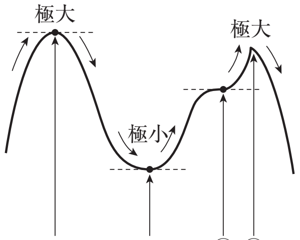
$f(x)$ は $x=a$ で**極大**となり，$f(a)$ を**極大値**という．

$f'(x)$ の値が負から正に変わるとき

$f(x)$ は減少から増加に転じる．このとき

$f(x)$ は $x=a$ で**極小**となり，$f(a)$ を**極小値**という．

極大値と極小値をあわせて**極値**という．



□$f(x)$ が極値をとる x の候補として，$f'(x)=0$ となる x の値が挙げられる（上図α，β）．しかし，関数によっては $f'(x)=0$ であっても極値をとるとは限らない（上図①）．また，極値をとる x に対して常に $f'(x)=0$ が成り立つとは限らない（上図②）．

□一般に，多項式で表された関数において，$x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$ である．

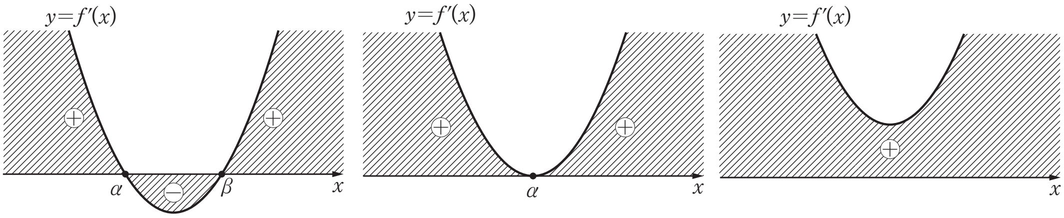
⇒　C&U 1

［2］　3次関数の極値

□3次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，$a>0$ とする．

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ は x^2 の係数 $3a$ が正であることより，グラフは下に凸の放物線である．以下は $y=f'(x)$ のグラフの概形である．

(i)　　(ii)　　(iii)



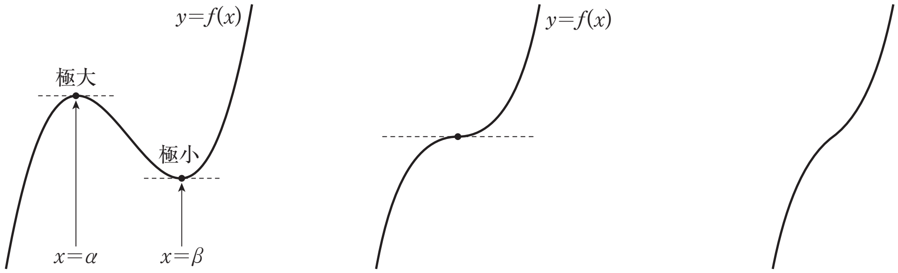
(i)の場合は，$x=\alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に，$x=\beta$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正にそれぞれ転じるので，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となり，$f(x)$ は2つの極値をもつ．

(ii)の場合は，$x=\alpha$ の前後において $f'(x)$ の符号はともに正より，$f(x)$ は極値をもたない．

(iii)の場合は，x の値に関わらず $f'(x)$ の符号は常に正より，$f(x)$ は極値をもたない．

(i)～(iii)それぞれの場合の $y=f(x)$ のグラフの概形は以下となる．

(i)　　(ii)　　(iii)



3次関数 $y=f(x)$ が極値をもつのは(i)の場合のみである．(i)は $f'(x)=0$ において判別式を D とすると，$D>0$ である．一般的に，以下のことがいえる．

> 3次関数 $f(x)$ が極値をもつ　$\Longleftrightarrow$　$f'(x)=0$ で判別式 $D>0$

$a<0$ の場合も同様である．

ちなみに上の(ii)，(iii)においては，$y=f(x)$ は極値をもたず，グラフは単調に増加している．

$a<0$ の場合においても極値をもたず，グラフは単調に減少する．

⇒　C&U ②

［３］　最大・最小

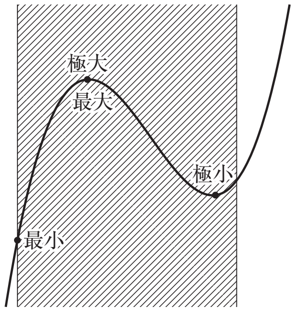
□ある区間で定義された関数 $f(x)$ について考える．この区間の１点 $x=a$ における関数の値 $f(a)$ が，この区間内のすべての x に対して

$f(x) \leqq f(a)$　ならば　$f(x)$ は $x=a$ で**最大**となり，$f(a)$ を**最大値**という．

$f(x) \geqq f(a)$　ならば　$f(x)$ は $x=a$ で**最小**となり，$f(a)$ を**最小値**という．

□関数の極大値，極小値は，それぞれを含む十分小さい区間においてはそれぞれ最大値，最小値である（局所的な最大，最小である）．しかし，区間全体からみると最大値，最小値であるとは限らない．

　一般に，区間 $a \leqq x \leqq b$ における最大値，最小値を求めるには，この区間でとるすべての極値とこの区間の端点の値 $f(a)$，$f(b)$ との大小を比較すればよい．



⇒　C&U ３

【CHECK & UP】

1　次の関数の増減を調べ，グラフを描け．また極値を求めよ．

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$　(2)　$f(x)=x^3+1$　(3)　$f(x)=-x^3-4x$

2　3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ がつねに増加するような定数 a の範囲を求めよ．

3　関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ の $-2\leqq x\leqq 4$ における最大値，最小値を求めよ．

< Note >

第29講　微分法・積分法(2)

1 [1]　3次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる．このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ．

[2]　(1)　3次関数　$f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ．

< Note >

2　関数 $y=x^3-3|x^2-1|-1$ の極値を求めよ.

＜ Note ＞

3 $a>0$ のとき，関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を求めよ．

< Note >

第 29 講　微分法・積分法(2)

　$a<0$ のとき　$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の極値を求めたい．

$f'(x)=6(x-a)(x-\boxed{ア})$ より，$x=a$，$\boxed{ア}$ のとき $f'(x)=0$ である．

$a<0<\boxed{ア}$ であることより，$f(x)$ は極大値　$-a^3+\boxed{イ}a^2$，極小値

$\boxed{ウ}a-\boxed{エ}$ をとる．

　次に，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めたい．区間 $-2\leqq x\leqq 2$ に $x=\boxed{ア}$

は含まれる．また，$f(x)=f(\boxed{ア})$　より

$(x-\boxed{ア})^2\{2x-(\boxed{オ}a-\boxed{カ})\}=0$　であるから，この方程式の解は

$x=\boxed{ア}$，$\dfrac{\boxed{オ}a-\boxed{カ}}{2}$ である．したがって

　　$\dfrac{\boxed{オ}a-\boxed{カ}}{2}<-2$　つまり　$a<-\boxed{キ}$ のとき

　　$f(x)$ の最小値は　$\boxed{ウ}a-\boxed{エ}$，

　　$-\boxed{キ}\leqq a<0$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$-\boxed{クケ}a-\boxed{コサ}$　である．

＜ Note ＞

第 29 講　微分法・積分法(2)

【CHECK & UP】

1 (1) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

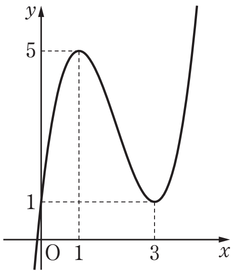
$f'(x)>0$ となるのは　$x<1,\ 3<x$

$f'(x)<0$ となるのは　$1<x<3$

よって　$f(x)$ の増減は下表．

グラフは右図．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	0	↗



したがって

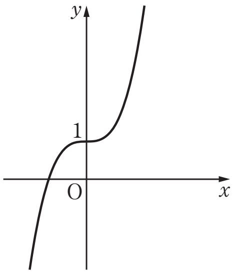
$x\leqq1,\ 3\leqq x$ で増加　$1\leqq x\leqq3$　で減少

極大値　5　　極小値　1

(2) $f'(x)=3x^2$

よって増減は下表．グラフは右図．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗



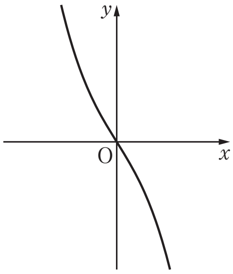
したがって，つねに増加

極値はない

(3) $f'(x)=-3x^2-4$

よって増減は下表．グラフは右図．

x	$\cdots$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	↘



したがって，つねに減少

極値はない

グラフの増減を表した表，すなわち「増減表」と，それを元にしてグラフを描く練習である．
　$f'(x)$ の符号によりグラフの増減が決定するが，それは不等式を解くことによって得られる．その不等式が 2 次（以上）になると，「グラフ」による解法となるであろう．その際，$f'(x)=0$ となる x が $f'(x)$ の正負の分かれ目となる．
　しかしながら，すぐに $f'(x)=0$ とすぐに置く必要は全くないことは，2 次不等式の解法を通じて既習である．特に $f'(x)$ が簡単に因数分解できる場合はまさにその例である．
　「増減を調べよ」となっているので，増減を文で表し直している．その際，増加（減少）する範囲には，$f'(x)=0$ となる x の値も含まれる．
　また，増加から減少，減少から増加に転じたときの関数の値が「極値」である．したがって(2)でわかるように，$f'(x)=0$ が極値をとる x 座標になるとは限らない．
(3)では増減表が味気ないものとなっている．文章だけでもよいだろう．

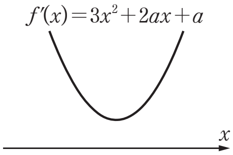
2 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

よって　$f'(x)=0$ における判別式を D とすると，$D\leqq0$ であればよい．

したがって

$\dfrac{D}{4}=a^2-3a\leqq0\qquad a(a-3)\leqq0$

ゆえに　$\boldsymbol{0\leqq a\leqq3}$



$f(x)$ の増減を決めるのは $f'(x)$ の符号．この $f'(x)$ の正負は，$y=f'(x)$ のグラフが x 軸より上に存在するか，下に存在するか，である．$f(x)$ が 3 次関数であれば，$f'(x)$ は 2 次関数になる．これが常に「0 以上」(0 になってもよい) であれば，$f(x)$ はつねに増加する．
　特に x の変域に指定がない（すべての実数を取り得る）場合は，2 次関数のグラフと x 軸の関わり合いは「2 乗の係数の正負」と「判別式」で扱うことができる．

3　$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	8	↘	-19	↗	33

よって　**最大値 33**（$x=4$）　　**最小値 −19**（$x=2$）

最大値および最小値については，変域の中に極値をとる x 座標が入っていれば極値が候補となる．この候補と，変域の端における値を比較して最大値，最小値を導く．もちろん極値をとる x 座標が含まれていないときは，最大値，最小値は変域の端でのみとることができる．.

第 29 講　微分法・積分法(2)

1 [1]　3 次関数　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=1$ で極小値 -2，$x=3$ で極大値 2 をとる．このとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ．

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　より　$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　……①

$f(x)$ が $x=1$ で極小値，$x=3$ で極大値をもつので，

$f'(x)=3a(x-1)(x-3)=3ax^2-12ax+9a$　$(a<0)$　……②　とおける．

①，②を係数比較して　$2b=-12a$，$c=9a$　　よって　$b=-6a$

このとき　$f(x)=ax^3-6ax^2+9ax+d$

$f(1)=-2$，$f(3)=2$　より　$4a+d=-2$，$d=2$

よって　$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=6}$，$\boldsymbol{c=-9}$，$\boldsymbol{d=2}$　($a<0$ を満たす)

1 [2]　(1)　3 次関数　$f(x)=x^3+(a-2)x^2-3ax-2$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を求めよ． (2)　関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ の極値を求めよ．

(1)　$f'(x)=3x^2+2(a-2)x-3a$

$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもてばよい．

よって $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+9a>0 \qquad a^2+5a+4>0 \qquad (a+4)(a+1)>0$$

したがって　$\boldsymbol{a<-4}$，$\boldsymbol{-1<a}$

(2)　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$a>0$ のとき　$x=-a$ で極大値 $2a^3$

$x=a$ で極小値 $-2a^3$　をとる

$a=0$ のとき　$f'(x)=3x^2\geqq 0$　より　$f(x)$ は単調増加．よって**極値はない**

$a<0$ のとき　$x=a$ で極大値 $-2a^3$

$x=-a$ で極小値 $2a^3$　をとる

2　関数 $y=x^3-3\|x^2-1\|-1$ の極値を求めよ．

$$y=x^3-3|x^2-1|-1=\begin{cases} x^3-3x^2+2=f_1(x) & (x\leqq -1,\ 1\leqq x) \\ x^3+3x^2-4=f_2(x) & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$ とおく．

$$y'=\begin{cases} f_1{}'(x)=3x^2-6x=3x(x-2) & (x<-1,\ 1<x) \\ f_2{}'(x)=3x^2+6x=3x(x+2) & (-1<x<1)\end{cases}$$

x		-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	
y'	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
y	↗	-2	↘	-4	↗	0	↘	-2	↗

よって

極大値　-2（$x=-1$）と　0（$x=1$）

極小値　-4（$x=0$）と　-2（$x=2$）

3　$a>0$ のとき，関数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を求めよ．

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$　$(a>0)$

x	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}a^3$	↘	0	↗

ここで　$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3$ より　$x^3-2ax^2+a^2x-\frac{4}{27}a^3=0$

$\left(x-\frac{a}{3}\right)^2\left(x-\frac{4}{3}a\right)=0$　　$x=\frac{a}{3},\ \frac{4}{3}a$

$1<\frac{a}{3}$　つまり　$a>3$ のとき　最大値　$f(1)=a^2-2a+1$

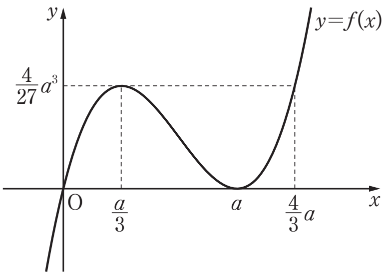
$\frac{a}{3}\leqq 1\leqq\frac{4}{3}a$　つまり　$\frac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　最大値　$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3$

$\frac{4}{3}a<1$　つまり　$0<a<\frac{3}{4}$ のとき　最大値　$f(1)=a^2-2a+1$

以上より

$0<a<\frac{3}{4}$，$3<a$ のとき　最大値　a^2-2a+1

$\frac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　最大値　$\frac{4}{27}a^3$



第 29 講　微分法・積分法(2)

$a<0$ のとき　$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$ の極値を求めたい．

$f'(x)=6(x-a)(x-$ ア $)$ より，$x=a$， ア のとき $f'(x)=0$ である．

$a<0<$ ア であることより，$f(x)$ は極大値　$-a^3+$ イ a^2，極小値

ウ $a-$ エ をとる．

次に，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値を求めたい．区間 $-2\leqq x\leqq 2$ に $x=$ ア

は含まれる．また，$f(x)=f($ ア $)$　より

$(x-$ ア $)^2\{2x-($ オ $a-$ カ $)\}=0$　であるから，この方程式の解は

$x=$ ア ，$\dfrac{\text{オ}\,a-\text{カ}}{2}$ である．したがって

$\dfrac{\text{オ}\,a-\text{カ}}{2}<-2$　つまり　$a<-$ キ のとき

$f(x)$ の最小値は　ウ $a-$ エ ，

$-$ キ $\leqq a<0$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$-$ クケ $a-$ コサ 　である．

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$　より

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-a)(x-\mathbf{1})$　より　$x=a$，1 のとき $f'(x)=0$ である．

$a<0<1$　より　$f(x)$ は

極大値　$f(a)=-a^3+\mathbf{3}a^2$　　　極小値　$f(1)=\mathbf{3}a-\mathbf{1}$

をとる．

$-2\leqq x\leqq 2$ に $x=1$ は含まれる．よって極小値 $f(1)$ は $f(x)$ の最小値の候補である．

この $f(1)$ と変域の左端の値 $f(-2)$ のうち大きくない方が，求める $f(x)$ の最小値である．

$f(x)=f(1)$ より　$2x^3-3(a+1)x^2+6ax=3a-1$

$2x^3-3(a+1)x^2+6ax-3a+1=0$

$(x-1)^2\{2x-(\mathbf{3}a-\mathbf{1})\}=0$　　　$x=1,\ \dfrac{3a-1}{2}$

よって　$\dfrac{3a-1}{2}<-2$ つまり $a<-1$ のとき　区間 $-2\leqq x\leqq 2$ に $x=\dfrac{3a-1}{2}$ は含まれない．

つまり　$a<-\mathbf{1}$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$f(1)=3a-1$　である．

また，$-1\leqq a<0$ のとき　$f(x)$ の最小値は　$f(-2)=-\mathbf{24}a-\mathbf{28}$　である．